INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE 2003

Epréuve de Mathématique III

Durée 3 heures

Dans tout ce problème, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ muni de sa base canonique $e_1 = (1, 0, 0 \ldots)$ $e_2 = (0, 1, 0 \ldots)$, $e_n = (0, 0, \ldots 0, 1)$. du produit scalaire usuel :

$$< x, y > = \sum_{i=1} x_i y_i$$

et de la norme euclidienne

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

On rappelle qu'une partie C de E est dite convexe si, pour tout couple $(a. b) \in C \times C$ le segment $[a. b] = \{ \lambda a - (1 - \lambda) b \quad \lambda \in [0, 1] \}$ esf inclus dans C

PROJECTIONS

1. Soit $x \in E$ er C une partie non vide. convexe et fermée de E

a) Justifier l'existence d'un élément x_C de C vérifiant

$$\forall y \in C, \| x - x_C \| \leq \| x - y \| \qquad (1)$$

(on pourra commencer par traiter le cas ou C est compacte)

b) Montrer qu'un seul élément x_C de C vérifie (1)

On appellera désormais x_C le projeté de x sur C

c) Montrer que $\forall y \in C, < y - x_C \mid y - x_C > \leq 0$

d) Réciproquement, montrer que, si un eiement z de C vérifie

$$\forall y \in C. < x - z \mid y - z > \leq 0,$$

z est nécessairement le projete de x sur C

e) Montrer que l'assertion du I.a) ne serait pâs nécessairement vraie si C n'était pas fermée L'assertion du I.b) reste-t-elle vraie lorsque C n'est pas supposée convexe?

II. Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension $\mathbf{k} \geq 1$

a) Montrer que F est une partie non vide, convexe et fermée de E

Soit x_F le projeté d'un vecteur x de E sur F (au sens de la partie 1).

b) Montrer que $x - x_F$ est orthogonal à F et donner l'expression des composantes de x_F dans une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_k)$ de F.

c) Trouver, dans le cas où n=3, le projeté de $x=(x_1, x_2, x_3)$ sur le plan engendré par les deux vecteurs $a = (1, 2, 1)$ et $b = (0, 0, 1)$.

d) Soit H un sous-espace vectoriel de F. Montrer que $(x_F)_H = x_H$. En déduire

$$\| x - x_H \|^2 = \| x - x_F \|^2 + \| x_F - x_H \|^2 .$$

e) L'égalité $(x_C)_D = x_D$ est-elle valable pour tout couple (C,D) de parties convexes fermées non vides de E telles que $D \subset C$?

III. Soit s un nombre entier strictement positif. On se donne, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots\ldots s\}$, un entier $n_i \geq 1$.
On note $I = \{(i, j) : 1 \leq i \leq s , 1 \leq j \leq n_i\}$ et $\mathbb{R}^I$ i'ensemble des applications f de I dans $\mathbf{R}$ que l'on écrira sous forme indicielle $f = \left(f_{i,j}\right)_{(i,j)\in I}$.

a) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^I$?

Soit $x = \left(x_{i,j}\right)_{(i,j)\in I}$ un vecteur de $\mathbb{R}^I$

Pour tout nombre entier i compris entre 1 et s, on note: $\overline{x_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j}$

b) Etablir l'égalité

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq s \\ 1\leq j\leq n_i}} \left(x_{i,j} - \overline{x}\right)^2 = \sum_{\substack{1\leq i\leq s \\ 1\leq j\leq n_i}} \left(x_{i,j} - \overline{x_i}\right)^2 + \sum_{1\leq i\leq s} n_i \left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2 \quad \left(\text{où } \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{1\leq i\leq s \\ 1\leq j\leq n_i}} x_{i,j}\right)$$

et en donner une interprétation géométrique en termes de projection

MOINDRES CARRES EN ALGEBRE LINEAIRE

Soit a une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}^p$ ($\mathbf{p} \geq 1$).
Dans cette partie x désigne un vecteur de $\mathbb{E}$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$). On note X la matrice-colonne des composantes de x, B la matrice-colonne des composantes de b et **A** la matrice canoniquement associée à a.

On cherche a résoudre l'équation (S) a(x)=b d'inconnue x, d'écriture matricielle $AX = B$.

IV. a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur b et a pour que l'équation (S) admette au moins une solution.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que l'équation (S) admette au plus une solution

V On se place desormais dans le cas ou l'équation a(x)=b n'admet pas de solution
On cherche alors a minimiser $\varphi(x) = \| a(x) - b \|^2$ et on appelle « pseudo-solution » de (S) tout vecteur x qui minimise φ

a) Montrer que si x est une pseudo-solution de (S), a(x) est la projection orthogonale de b sur Im u dans $\mathbb{R}^p$.

b) En déduire que l'ensemble des pseudo-solutions de (S) est un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ dont on précisera la direction.

cj Parmi les pseudo-solutions de (S), montrer qu'il y en a une seule de norme minimale (on pourra considerer la projection orthogonale sur $(\mathrm{Ker}\ a)^{\perp}$)

VI. Exemple : soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

aj Déterminer le rang de **A** et donner une base de Im a

b) Donner un système d'équation de Ker a. En déduire une base de $(\mathrm{Ker}\ a)^{\perp}$

c) Exprimer la pseudo-solution s de (Sj de norme minimale si b = (0, 0. 1, 1)

CONDITIONNEMENT

Dans cette partie, on conserve les notations précédentes mais on suppose n = p , A inversible et b non nul. On s'intéresse à l'effet d'une légère « perturbation » de la matrice A sur la solution de l'équation (S)

VII. Pour toute matrice M de M, ($\mathbb{R}$) (matrice carrée réelle d'ordre nj, on note

N (Mj = sup { || f(x) || ; x∈E, || x || = 1 }, où f désigne l'endomorphisme de E canoniquement associé à M.

aj Justifier, pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, l'existence du nombre N (M) et le calculer lorsque M est une matrice diagonale.

b) Justifier, pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ et toute matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$, les égalités

$$N(PM) = N(MP) = N(M)$$

c) Démontrer que N est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

d) Montrer que, si H est une matrice de M_n (Rj de norme N (H) suffisamment petite. il existe un unique élement Y de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que (A–H) Y = B

VIII.

a) Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice ^{t}**A.** A sont réelles et strictement positives.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et n nombres réels strictement positifs σ_1 σ_2 , σ_n , uniques à une permutation pres, tels que

$$ {}^t P\, {}^t A A\, P = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} $$

IX.

a) Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et V telles que

$$ \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ . & & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} $$

b) En déduire que $N(A) = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n\}$

c) Exprimer $N(A)$ à l'aide des valeurs propres de **A** lorsque **A** est symétrique

X. On appelle conditionnement de **A** le nombre réel strictement positif

$$ c(A) = N(A)\, N(A^{-1}) $$

a) Montrer que c(A) est supérieur ou égal a 1 et indiquer dans quels cas on a l'égalité

b) Montrer que, si la norme N(H) d'une matrice H de $M_n(\mathbf{R})$ est strictement inférieure à $\frac{N(A)}{c(A)}$, la série de matrices $\sum_{n\geq 0} (-A^{-1}H)^n$ est convergente et la matrice A + H inversible.

c) On notera dans ce cas $\delta = y - x$, où x et y sont les uniques vecteurs de E vérifiant $a(x) = b$ et $(a + h)(y) = b$, et h l'endomorphisme de E canoniquement associé à H.

Montrer que la matrice-colonne des composantes de δ est $-A^{-1}(I_n + A^{-1}H)^{-1}HX$ et en déduire l'inégalité

$$ \frac{\|\delta\|}{\|x\|} \leq \frac{c(A)}{N(A) - c(A)N(H)}\, N(H) $$

XI.

a) Calculer, pour tout $\varepsilon > 0$, le conditionnement de la matrice

$$ A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} $$

b) Comparer les solutions des deux systèmes de Cramer

$$ \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} $$

et commenter les résultats obtenus